ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Гайдаев
А.А. Абдурашидова
А.М. Магдиев

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ

Учебно-методическое пособие

Махачкала – 2022

УДК 53(076.1)
ББК 22.3я73
Г12

Печатается по решению методического совета ДГПУ

А.А. Гайдаев, А.А. Абдурашидова, А.М. Магдиев
Решение задач по молекулярной физике и термодинамике
- Махачкала, ДГПУ, - 2022. – 72 с.

Пособие содержит задачи с решениями по основным разделам молекулярной физики и основ термодинамики. По всем темам приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые при решении задач, а также даны задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки «Физика и математика» и может быть использовано на любом уровне подготовки: бакалавриате, магистратуре, при подготовке кадров высшей квалификации.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методической пособие «Решение задач по молекулярной физике и термодинамике» предназначено для студентов педагогического университета очного и заочного отделений физического факультета. В нем дана краткая теория по основным разделам молекулярной физики, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Пособие будет способствовать изучению курса молекулярной физики и получению навыков решения задач.

Рекомендуем следующий порядок решения задач:

1. Изучить теорию вопроса;
2. Рассмотреть решение приведенных в пособии примеров;
3. Записать данные задачи в СИ, дополнив их табличными данными из задачников; если требуется сделать чертеж (схему, график);
4. Написать необходимые формулы с кратким их разъяснением и решить задачу в общем виде. Если общее решение получается громоздким, то можно решить задачу по частям. Единицы измерения вычисляемых величин желательно получать сразу, подставляя их вместе с численными значениями в окончательную формулу;
5. Провести анализ решения задачи и дать оценку результата.

§1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Идеальный газ подчиняется уравнению состояния Менделеева-Клапейрона

$$\mathbf{pV = \frac{m}{\mu}RT}, \qquad (1.1)$$

где **p** - давление газа, **V** - его объем, **T** - абсолютная температура, **m** - масса газа, **μ** - масса одного моля газа, **R** - универсальная газовая постоянная; отношение m/μ дает число молей (киломолей).

В единицах СИ универсальная газовая постоянная численно равна $\mathbf{R} = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$.
(1.2)

Из формулы (1.1) можно получить:

а) Закон Бойля-Мариотта для изотермического процесса (T = const) $\mathbf{pV} = \text{const}$; (1.3)

б) Закон Гей-Люссака при **p** = const

$$\mathbf{V/T} = \text{const}; \qquad (1.4)$$

и закон Шарля при **V** = const

$$\mathbf{p/T} = \text{const}. \qquad (1.5)$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов имеет вид:

$$\mathbf{p = \frac{1}{3}n_0 m\bar{v}^2 = \frac{2}{3}n_0\bar{E}_K = n_0 kT}, \qquad (1.6)$$

$$\mathbf{\rho = n_0 m} \text{ - плотность газа}, \qquad (1.7)$$

где $\mathbf{n_0}$ - число молекул в единице объема, $\mathbf{\bar{E}_K}$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, **m** - масса молекулы, $\mathbf{\bar{v}}$ - средняя квадратичная скорость молекул,

$$\mathbf{k = \frac{R}{N_A}} \text{ - постоянная Больцмана}, \qquad (1.8)$$

$$m = \frac{\mu}{N_A}, \qquad (1.9)$$

N_A - число Авогадро, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, (1.10)

тогда $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. (1.11)

Закон Дальтона: $p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$. (1.12)

p - общее давление смеси газов, p_1, p_2, … парциальные давления.

Общее число молей газа - $\frac{m}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \cdots + \frac{m_i}{\mu_i}$ (1.13)

$\frac{m_i}{\mu_i}$ - число молей **i**-го газа, находящегося в смеси.

Примеры решения задач

Пример 1. В баллоне объемом 5 л находится гелий под давлением $5 \cdot 10^5$ Па и при температуре 27°С. После того, как из баллона взяли часть гелия, давление в баллоне стало равным $2 \cdot 10^5$ Па, и температура понизилась до 17 °С. Определить, какое количество гелия взяли из баллона и сколько осталось в нем.

ДАНО:

$V = 5$ л $= 5.10^{-3}$ м^3
$\mu = 4 \cdot 10^{-8}$ кг/моль
$p_1 = 5.10^5$ Па
$t_1 = 27°C$; $T_1 = 300$ К
$p_2 = 2.10^5$ Па
$t_2 = 17°C$; $T_2 = 290$ К
$R = 8{,}31$ Дж/моль·К

$\Delta m = ?$
$m_2 = ?$

РЕШЕНИЕ:

Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона (1.1), применив его дважды: к начальному и конечному состояниям.

В начальном состоянии уравнение имеет вид:

$$p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1, \qquad (1)$$

где p_1 - начальное давление гелия в

баллоне, **V** - объём баллона, **m** - начальная масса гелия, **μ** - масса моля гелия, **R** - универсальная газовая постоянная, **T** - начальная температура по абсолютной шкале температур. Для конечного состояния уравнение Менделеева-Клапейрона напишем в виде:

$$\mathbf{p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2}. \qquad (2)$$

$\mathbf{p_2}$; $\mathbf{T_2}$; $\mathbf{m_2}$ - давление, температура и масса в конечном состоянии, соответственно. Объем сосуда не меняется.

Из уравнений (1) и (2) можно написать:

$$\mathbf{m_1 = \frac{\mu p_1 V}{R T_1}}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{m_2 = \frac{\mu p_2 V}{R T_2}}. \qquad (4)$$

Вычитая из равенства (3) равенство (4), получим:

$$\mathbf{\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)}. \qquad (5)$$

Подставим числовые значения величин в формулу (5).

$$\mathbf{\Delta m = \frac{4 \cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,м^3}{8.31\,\frac{Дж}{моль \cdot К}}\left(\frac{5 \cdot 10^5\ Па}{300\,К} - \frac{2 \cdot 10^5\ Па}{290\,К}\right) =}$$

$$\mathbf{= \frac{20}{8.31 \cdot 10^{32}}\left(\frac{5}{8} - \frac{2}{2.9}\right)\frac{\frac{кг}{моль} \cdot м^3 \cdot \frac{Н}{м^2}}{Н \cdot м \cdot \frac{К}{моль \cdot К}} =}$$

$$\mathbf{= \frac{2}{8.31 \cdot 10^3}\left(\frac{14.5 - 6}{8.7}\right) кг = 2.35 \cdot 10^{-3}\ кг.}$$

$\mathbf{m_2}$ определим из (4):

$$m_2 = \frac{4 \cdot 10^{-3} \dfrac{кг}{моль} 2 \cdot 10^5 \dfrac{Н}{м^2} 5 \cdot 10^{-3}\, м^3}{8.31 \dfrac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 290\, К} = 1.65 \cdot 10^{-3}\, кг.$$

Ответ: $\Delta m = 2.35 \cdot 10^{-3}\, кг$

$m_2 = 1.65 \cdot 10^{-3}\, кг$

Пример 2. В двух сосудах объемом 5 л и 7 л находится воздух под давлениями **p_1** = 1 атм и **p_2** = 2 атм. Температура сосудов одинаковая. Какое давление установятся, если сосуды соединить между собой?

ДАНО:

$p_1 = 10^5 \dfrac{Н}{м^2}$

$p_2 = 2 \cdot 10^5 \dfrac{Н}{м^2}$

$V_1 = 5 \cdot 10^{-3} м^3$

$V_2 = 7 \cdot 10^{-3} м^3$

$P = ?$

РЕШЕНИЕ:

Пишем данные в единицах СИ.

Сделаем рисунок.

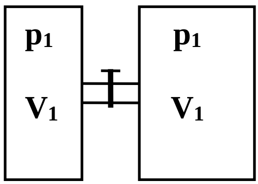


Рис. 1.1.

Задачу решим на основе уравнения Бойля-Мариотта (1.3). После соединения сосудов общий объем

$$V = V_1 + V_2, \qquad (1)$$

общее давление $p = p'_1 + p'_2$, где p'_1 и p'_2 - парциальные давления в общем объеме, создаваемые воздухом из I и II сосудов, соответственно. Для них закон Бойля-Мариотта (1.3) имеет вид: $p_1 V_1 = p'_{11} V$ и $p'_1 = \dfrac{p_1 V_1}{V}$

$$p_2 V_2 = p'_2 V \quad \text{и} \quad p'_2 = \frac{p_2 V_2}{V}$$

Воспользовавшись законом Дальтона (1.12), получим:

$$p_1 = p'_1 + p'_2 = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

$$\mathbf{p}=\frac{1}{12\cdot10^{-3}\,\text{М}^3}\left(10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot5\cdot10^{-3}\,\text{м}^3+2\cdot10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot7\cdot10^{-3}\,\text{м}^3\right)=$$

$$=\frac{10^2\cdot19}{12\cdot10^{-3}}\,\frac{\text{Нм}}{\text{м}^3}=1.58\cdot10^5\,\text{Па}.$$

Ответ: $\mathbf{p=1.58\cdot10^5}$ **Па** .

Пример 3. Какое количество молекул находится в 1 см^3 комнаты при температуре 17 °С и давлении 760 мм рт. ст.? Определить плотность воздуха при этих условиях.

ДАНО	РЕШЕНИЕ:
t = 17 °С, Т = 290 К **p** = 760 мм рт. ст. = 10^5 Па **μ** = $2.9\cdot10^{-2}$ кг/моль **k** = $1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К	Для решения задачи воспользуемся основным уравнением молекулярно-кинетиче-ской теории газов:
n_0 = ? ρ = ?	$$\mathbf{p = n_0kT}. \qquad (1)$$ Отсюда $$\mathbf{n_0 = p/kT}, \qquad (2)$$

Подставим числовые значения величин в формулу (2):

$$\mathbf{n_0}=\frac{10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}{1.38\cdot10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\cdot290\,\text{К}}=\frac{10^{26}}{1.38\cdot2.9}\,\frac{1}{\text{м}^3}=$$

$$=2.5\cdot10^{25}\,\frac{1}{\text{м}^3}=2.5\cdot10^{19}\,\frac{1}{\text{см}^3}.$$

Плотность воздуха найдём по формуле

$$\rho=n_0m_1, \qquad (3)$$

где $\mathbf{m_1}$ - масса одной молекулы воздуха,

Её найдём по формуле (1.9)

$$m_1=\frac{\mu}{N_A}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$\rho = n_0 \frac{\mu}{N_A}. \tag{5}$$

Подставляя числовые значения величин в формулу (5), имеем:

$$\rho = n_0 \frac{\mu}{N_A} = 2.5 \cdot 10^{25} \frac{1}{м^3} \cdot \frac{29 \frac{кг}{кмоль}}{6.02 \cdot 10^{26} \frac{1}{кмоль}} = 1.21 \frac{кг}{м^3}.$$

$$\textbf{Ответ: } n_0 = 2.5 \cdot 10^{25} \frac{1}{м^3} = 2.5 \cdot 10^{19} \frac{1}{см^3},$$

$$\rho = 1.21 \frac{кг}{м^3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. В закрытом сосуде емкостью 2 м^3 находится 1,4 кг азота и 1,6 кг кислорода. Найти давление газовой смеси в сосуде, если температура смеси равна 27°С.

1.2. В сосуде объемом V_1 = 2 дм^3 находится газ под давлением 2.10^5 Па, а в сосуде объемом V_2 = 4 дм^3 - под давлением 3.10^5 Па. Определить, какое давление будет иметь газ, если открыть кран, соединяющий оба сосуда.

1.3. В колбе объемом 5 дм^3 содержится газ под давлением 0.5 Па. Сколько молекул газа в колбе, если температура газа 0°С ?

1.4. В сосуде объемом 25 л содержится 20 г азота и 10 г углекислого газа при температуре 300 К. Определите: молярную массу смеси, давление в сосуде, давление после нагревания смеси до 500 К.

1.5. Газовая смесь, состоящая из водорода и гелия, находится в баллоне под давлением 10 Па. Считая, что масса водорода в два раза больше массы гелия, определить парциальные давления водорода и гелия.

1.6. В баллоне емкостью 10 л находится кислород при нормальных условиях. После того, как в баллон накачали дополнительно некоторое количество кислорода, давление в баллоне возросло до 2.5 атм. Температура стала равной 320 К. Определить массу кислорода, введенного в баллон.

1.7. 0пределить плотность воздуха при температуре 10°С и давлении 700 мм рт.ст.

1.8. Сосуд емкостью 4 л содержит 2 г некоторого газа под давлением 3 атм. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа.

1.9. В сосуде находится смесь 20 г водорода и 15 г аргона. Найти плотность этой смеси при температуре 17 °С и давлении $3 \cdot 10^5$ Па.

1.10. Вычислить, на сколько может повыситься давление в сферическом сосуде радиусом r = 10 см, если адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд после нагревания до 300°С. При температуре t = 17 °С молекулы покрывают одним слоем внутренние стенки сосуда, и каждая молекула занимает на поверхности площадь, равную 10^{-19} м^2.

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

1. Изменение концентрации молекул в поле земного тяготения определяется по формуле

$$\mathbf{n} = \mathbf{n_0 e}^{-\frac{\mathbf{mgh}}{\mathbf{kT}}} = \mathbf{n_0 e}^{-\frac{\mathbf{\mu gh}}{\mathbf{RT}}}, \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{n}$ - число молекул в единице объема (концентрация) на высоте $\mathbf{h}$, $\mathbf{n_0}$ - концентрация молекул на высоте $\mathbf{h} = 0$.

2. Барометрическая формула, выражающая зависимость давления идеального газа от высоты $\mathbf{h}$ над поверхностью Земли, имеет вид:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_0 e}^{-\frac{\mathbf{\mu gh}}{\mathbf{RT}}}, \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{p}$ - давление газа на высоте $\mathbf{h}$, $\mathbf{p_0}$ - давление газа на высоте $\mathbf{h} = 0$. Формулы (2.1) и (2.2) справедливы, если температура не меняется с высотой.

3. Скорости молекул определяются по формулам:

средняя квадратичная $$\bar{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3kT}}{\mathbf{m_1}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3RT}}{\mathbf{\mu}}}, \qquad (2.3)$$

где m_1 - масса одной молекулы, μ - молярная масса газа;

средняя арифметическая $$\mathbf{v_a} = \sqrt{\frac{\mathbf{8kT}}{\mathbf{\pi m_1}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{8RT}}{\mathbf{\pi\mu}}}; \qquad (2.4)$$

наиболее вероятная $$\mathbf{v_в} = \sqrt{\frac{\mathbf{2kT}}{\mathbf{m_1}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2RT}}{\mathbf{\mu}}}. \qquad (2.5)$$

4. Закон распределения Максвелла.

$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv\,. \qquad (2.6)$$

Число Δn молекул, относительные скорости которых находятся в интервалах от u до $u + \Delta u$, определяется по формуле

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n u^2 e^{-u^2} \Delta u\,, \qquad (2.7)$$

где n - общее число молекул,

$u = \frac{v}{v_в}$ - относительная скорость,

$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_в}$ - интервал относительной скорости.

Примеры решения задач

Пример 3. Найти число молекул водорода в 1 см^3 при нормальных условиях, в интервале скоростей от 400 м/с до 404 м/с.

ДАНО:

$V = 1$ см^3 $=10^{-6}$ м^3
$T = 273$ К
$P = 10^5$ Па
$v_1 = 400$ м/с
$v_2 = 405$ м/с

Δn = ?

РЕШЕНИЕ:

Δn можно найти по формуле распределения молекул по скорости Максвелла (2.7):

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n u^2 e^{-u^2} \Delta u\,. \qquad (1)$$

Для всех газов при нормальных условиях число молекул в 1 м^3 равно $n = 2.7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ (число Лошмидта).

Вычислим значения величин, входящих в формулу Максвелла (1):

$$\mathbf{u = \frac{v}{v_в}}\ ; \qquad \mathbf{v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}}\ ; \qquad \mathbf{\Delta u = \frac{\Delta v}{v_в}}\ .$$

$$\mathbf{v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 402\,\frac{м}{с}}\ ; \qquad \mathbf{\Delta v = v_2 - v_1 = 4\,\frac{м}{с}}\ .$$

$$\mathbf{v_в = \sqrt{\frac{2 \cdot 8.31 \cdot 10^3 \cdot 273}{2}} = 1496\,\frac{м}{с}}\ .$$

$$\mathbf{u = \frac{402}{1496} \approx 0.27}\ ; \qquad \mathbf{\Delta u = \frac{4\,\frac{м}{с}}{1496\,\frac{м}{с}} = 0.0027}\ .$$

$$\mathbf{\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\, 2.7 \cdot 10^{25} e^{-(0.27)^2} \cdot 2.67 \cdot 10^{-3} = 1.57 \cdot 10^{23}}$$

Ответ: $\mathbf{\Delta n = 1.57 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{м^3} = 1.57 \cdot 10^{17}\,\frac{1}{см^3}}$.

Пример 2. На какой высоте над уровнем моря атмосферное давление составляет 10^4 Н/м^2, если температура воздуха 17 °С и не меняется с высотой, а давление на уровне моря нормальное? Найти число молекул в 1 м^3 на этой высоте.

ДАНО:

$\rho = 10^4$ Па
Т = 290 К
μ = 2.9.10^{-2} кг/моль
$P_o = 10^5$ Н/м^2

h - ?
n - ?

РЕШЕНИЕ:

Так как температура не меняется с высотой, то

$$\mathbf{p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}\ ; \quad \mathbf{\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$

Логарифмируя эту формулу, получаем:

$$\mathbf{\ell g\,\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g h}{RT}\,\ell g\ e}$$

Отсюда находим h:

$$h=\frac{RT\cdot \ell g\,\dfrac{p}{p_0}}{-\mu g\cdot \ell g\, e}=-\frac{8.31\,\dfrac{Дж}{моль\cdot К}\cdot 290\,К\cdot \ell g\,\dfrac{1}{10}}{2.9\cdot 10^{-2}\,\dfrac{кг}{моль}\cdot 10\,\dfrac{м}{с^2}\cdot 0.43}=19.35\cdot 10^3\,м=$$

$$=1.935\cdot 10^4\,м.$$

$$n=\frac{p}{kT}=\frac{10^4\,\dfrac{Н}{м^2}}{1.38\cdot 10^{-23}\,\dfrac{Дж}{К}\cdot 290\,К}=\frac{10^{25}}{4\,м^3}=2.5\cdot 10^{24}\,м^{-3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. На сколько уменьшится атмосферное давление **p** = 100 кПа при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту Δh = 1000 м? Считать, что температура воздуха равна 17 °С и не изменяется с высотой.

2.2. На какой высоте над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на поверхности? Температура воздуха равна 27 °С и не меняется с высотой.

2.3. На поверхности земли барометр показывает 760 мм рт. ст. Каково будет давление на высоте 533 м Останкинской телевизионной башни в Москве? Температура t = 7 °С.

2.4. При подъеме вертолета на некоторую высоту барометр, находящийся в его кабине, изменил свое показание на 85 мм рт. ст. На какой высоте летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал 755 мм рт. ст.? Температуру воздуха считать постоянной и равной 17 °С.

2.5. Каково давление и число молекул в единице объема воздуха на высоте 2 км над уровнем моря? Давление на уровне моря равно $1.01\cdot 10^5$ Н/м^2, а температуру считать постоянной и равной 10 °С.

2.6. Наивероятнейшая скорость некоторого газа $v_в$ = 1820 м/с. Температура газа t = 127 °С. Определить: 1) молярную массу газа, 2) среднюю арифметическую и 3) среднюю квадратичную скорости молекул.

2.7. Найти среднюю арифметическую, среднюю квадратичную и наиболее вероятную скорости молекул газа при нормальных условиях.

2.8. Определите, какая часть молекул азота при температуре t = 27 °С обладает скоростью от 210 до 215 м/с.

2.9. Какая часть молекул кислорода при 0°С обладает скоростью от 100 м/с до 110 м/с?

2.10. Найти число молекул водорода в 1 см^3 при нормальных условиях, скорости которых заключены в интервале между 399 и 401 м/с.

§ 3. ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1. Среднее число столкновений одной молекулы в единицу времени

$$\mathbf{\overline{Z} = \sqrt{2}\pi\sigma^2 n_o v}, \qquad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ - эффективный диаметр, $\mathbf{n_o}$ - число молекул в единице объема, **v** - средняя арифметическая скорость молекулы.

2. Средняя длина свободного пробега молекулы

$$\mathbf{\overline{\lambda} = \frac{v}{\overline{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_o} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}}. \qquad (3.2)$$

3. Общее число столкновений всех молекул, находящихся в единице объема, за единицу времени

$$\mathbf{Z = \frac{1}{2} n_o \overline{Z}}. \qquad (3.5)$$

4. Масса газа, перенесенного при диффузии,

$$\mathbf{\Delta M = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t}, \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{D = \frac{1}{3} v\overline{\lambda}}$ - коэффициент диффузии, (3.5)

$\mathbf{\frac{\Delta\rho}{\Delta x}}$ - градиент плотности, $\mathbf{\Delta S}$ - площадь, $\mathbf{\Delta t}$ - время.

5. Сила внутреннего трения

$$\mathbf{F} = \eta \frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta \mathbf{Z}} \Delta \mathbf{S}, \qquad (3.6)$$

где

$$\eta = \frac{1}{3} \mathbf{v} \bar{\lambda} \rho \ - \qquad (3.7)$$

коэффициент внутреннего трения газа;

$\frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta \mathbf{Z}}$ - градиент скорости, $\Delta \mathbf{S}$ - площадь слоев газа, перпендикулярная градиенту скорости, ρ - плотность газа.

6. Количество тепла $\mathbf{Q}$, перенесенное за время $\Delta \mathbf{t}$ в результате теплопроводности, равно

$$\mathbf{Q} = -\kappa \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta \mathbf{x}} \Delta \mathbf{S} \cdot \Delta \mathbf{t}, \qquad (3.8)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{3} \mathbf{v} \bar{\lambda} \rho \mathbf{C}'_v \ - \qquad (3.9)$$

коэффициент теплопроводности газа, $\frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta \mathbf{x}}$ - градиент температуры в направлении, перпендикулярном к площади $\Delta \mathbf{S}$, $\mathbf{C}'_v$ - удельная теплоемкость газа при $\mathbf{V}$ = const.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти среднюю длину свободного пробега атомов гелия в условиях, когда, плотность гелия $\rho = 0.05$ кг/м^3.

ДАНО:

$\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\sigma = 2 \cdot 10^{-10}$ м

$\rho = 0{,}05$ кг/м^3

$\bar{\lambda}$ - ?

РЕШЕНИЕ;

Длина свободного пробега (3.2)

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \mathbf{n}_o}. \qquad (1)$$

$\rho = \mathbf{n}_o \mathbf{m}_1$, где $\mathbf{m}_1$ - масса одной молекулы гелия, $\mathbf{m}_1 = \frac{\mu}{\mathbf{N}_A}$. $\mathbf{n}_o = \frac{\rho \mathbf{N}_A}{\mu}$.

(2)

Подставляя (2) в (1), имеем :

$$\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho N_A}.$$

$$\bar{\lambda} = \frac{4\,\frac{кг}{кмоль}}{\sqrt{2}\cdot 3.14\cdot 4\cdot 10^{-20}м^2\cdot 0.05\,\frac{кг}{м^3}\cdot 6.02\cdot 10^{26}кмоль^{-1}} = 7.5\cdot 10^{-7}\,м.$$

Пример 2. Азот находится при давлении Р = $2{\cdot}10^5$ Па и температуре 27 °С. Определить коэффициент теплопроводности.

ДАНО:

μ = $4{\cdot}10^{-3}$ кг/моль

i = 5

p = $2{\cdot}10^5$ Н/м^2

T = 300 К

σ= $3{\cdot}10^{-10}$ м

κ - ?

РЕШЕНИЕ:

Коэффициент теплопроводности найдем по формуле (3.9), используя (2.4), (3.2), (1.1)

$$\kappa = \frac{1}{3}v\bar{\lambda}\rho C'_v. \tag{1}$$

$$v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \tag{2}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P}. \tag{3}$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}. \tag{4}$$

$$C'_v = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}. \tag{5}$$

Здесь C'_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме,

i - число степеней свободы.

Подставим значения (2), (3), (4), (5) в формулу (1):

$$\kappa=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}\frac{p\mu}{RT}\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}\frac{ki}{\sigma^2\pi}. \qquad (6)$$

Подставим численные значения в (6), тогда

$$\kappa=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8.31\frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot 300\,К}{3.14\cdot 2.8\cdot 10^{-2}\frac{кг}{моль}}}\frac{1.38\cdot 10^{-23}\frac{Дж}{К}\cdot 5}{9\cdot 10^{-20}м^2\cdot 3.14}=$$

$$=\frac{5.3\cdot 10^{-3}}{9.42}\frac{Дж}{К\cdot с\cdot м}=5.6\cdot 10^{-4}\frac{Вт}{К\cdot м}.$$

$$\textbf{Ответ}:\ k=5.6\cdot 10^{-4}\frac{Вт}{К\cdot м}.$$

Пример 3. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения водорода при некоторых условиях равны соответственно D = 1.4·10^{-4} м/с^2; η = 8.5·10^{-6} Н·с^2/м^2. Определить: а) число молекул водорода в 1 м^3 при этих условиях; б) коэффициент теплопроводности.

ДАНО:

i = 5
μ = 2·10^{-3} кг/моль
D = 1.4·10^{-4} м^2/с
η = 8.5·10^{-6} Н·с^2/м^2

---

n_0 - ?
κ - ?

РЕШЕНИЕ:

Напишем формулы (3.5) и (3.7) для коэффициента диффузии $D=\frac{1}{3}v\bar{\lambda}$ (1) и коэффициента внутреннего трения $\eta=\frac{1}{3}v\bar{\lambda}\rho$. (2)

Отсюда $D=\eta\rho$. (3)

Плотность газа определим по формуле (1.7)

$$\rho=n_0 m_1=n_0\frac{\mu}{N_A}. \qquad (4)$$

$\eta=Dn_0\frac{\mu}{N_A}$, отсюда

$$\mathbf{n_0 = \frac{\eta N_A}{\mu D}}. \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения в (5), получим:

$$\mathbf{n_0 = \frac{8.5\cdot 10^{-6}\,\frac{Н\cdot с}{м^2}\cdot 6.02\cdot 10^{26}\,кмоль^{-1}}{1.4\cdot 10^{-4}\,\frac{м^2}{с}\cdot 2\,\frac{кг}{кмоль}} = 1.82\cdot 10^{25}\,м^{-3}}$$

Коэффициент теплопроводности определим по формуле (3.9)

$$\mathbf{\kappa = \eta C'_v = \eta\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}}. \qquad (6)$$

$$\mathbf{\kappa = 8.5.10^{-6}\,\frac{Н\cdot с}{м^2}\cdot 2.5\,\frac{8.31\cdot 10^3\,\frac{Дж}{кмоль\cdot К}}{2\,\frac{кг}{кмоль}} = 8.8\cdot 10^{-2}\,\frac{Вт}{м\cdot К}}$$

Ответ: $\mathbf{n_o = 1.82\cdot 10^{25}\,м^{-3}}$,

$\mathbf{\kappa = 8.8\cdot 10^{-2}\,\frac{Вт}{м\cdot К}}$.

Пример 4. Определить количество азота, прошедшего через площадку 10 м^2 за 2 секунды, если градиент плотности в направлении перпендикулярном к площадке равен 1.5 кг/м^4. Температура азота 27 °С, длина свободного пробега молекул азота $\mathbf{\bar{\lambda} = 10^{-6}}$ м.

ДАНО:

$\mathbf{\Delta S}$ = 10 м^2 , $\mathbf{\Delta t}$ = 2 с

$\mathbf{\frac{\Delta\rho}{\Delta x} = 1.5\,\frac{кг}{м^4}}$, $\mathbf{T}$ = 300 К

$\mathbf{\bar{\lambda} = 10^{-6}}$ м

$\mathbf{\mu = 28\cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}}$

$\mathbf{\Delta M}$ **- ?**

РЕШЕНИЕ:

Напишем формулу массы газа, переносимой за счет диффузии (3.4):

$$\mathbf{\Delta M = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t}. \qquad (1)$$

Коэффициент диффузии найдем по формуле (3.5), используя формулу (2.4)

$$\mathbf{D = \frac{1}{3} v\bar{\lambda}}\,, \qquad (2)$$

где

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}\,. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), подучим:

$$\mathbf{\Delta M = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \bar{\lambda}\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t}\,. \qquad (4)$$

Подставим числовые значения величин, входящих в (1)

$$\mathbf{\Delta M = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8 \cdot 8.31\,\frac{Дж}{кмоль \cdot К} \cdot 300\,К}{3.14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}}} \cdot 10^{-6}\,м \cdot 1.5\,\frac{кг}{м^4} \cdot 10^{2}\,м^2 \cdot 2\,с =}$$

$$\mathbf{= 4.75 \cdot 10^{-3}\,кг.}$$

Ответ: $\mathbf{\Delta M = 4.75 \cdot 10^{-3}\,кг}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найти среднее число столкновений, испытываемых в течение 1 с молекулой азота при нормальных условиях.

3.2. Определить плотность кислорода, если средняя длина свободного пробега его молекул $\bar{\lambda}$ = 0,1 см.

3.3. Можно ли считать вакуум с давлением **p** = 10^{-3} мм рт. ст. высоким, если он создан в колбе диаметром **d** = 30 см, содержащей водород при температуре 10 °С?

3.4. Определить коэффициент диффузии молекул водорода при давлении его равном $2 \cdot 10^5$ Н/м^2 и температуре 100°С,

3.5. Найти коэффициент внутреннего трения и коэффициент теплопроводности молекул азота при температуре 20°С и давлении $1.2 \cdot 10^5$ Па.

3.6. Найти коэффициент теплопроводности водорода, если известно, что коэффициент внутреннего трения для него при этих условиях равен $8.6 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2.

3.7. Определить количество кислорода, прошедшего через площадку 6 м^2 за один час, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, равен 1,5 кг/м^4. Температура кислорода равна 17 °С. Длина свободного пробега молекул кислорода равна 10^{-6} м.

3.8. Какое количество тепла теряется ежечасно через окно площадью 6 м^2 за счет теплопроводности воздуха между рамами? Расстояние между рамами 20 см, температура помещения равна $t_1 = 17$ °С, температура наружного воздуха $t_2 = -27$ °С. Температуру между рамами считать равной средней арифметической между t_1 и t_2. Давление $P = 10^5$ Па.

3.9. Реактивный самолет летит со скоростью 900 км/ч. Считая, что слой воздуха, увлекаемый вследствие вязкости корпусом самолета равен 10 см, найти касательную силу, действующую на каждый квадратный метр корпуса самолета. Температуру воздуха считать равной 17 °С. Диаметр молекул воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-8}$ см.

3.10. Ветер дует над поверхностью воды со скоростью 20 м/с. Считая, что толщина слоя воздуха, задерживаемого водой равна 1.5 см, найти силу, действующую со стороны ветра на 1 м^2 поверхности воды. Температура воздуха 17 °С.

§ 4. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Формула первого начала термодинамики

$$\mathbf{dU = d'Q + d'A}. \quad (4.1)$$

$\mathbf{dU}$ - изменение внутренней анергии системы, $\mathbf{d'Q}$ - элементарное количество теплоты, подведенное к системе, $\mathbf{d'A}$ - элементарная работа, совершаемая системой.

$$\mathbf{dU = \frac{m}{\mu} C_v dT}, \qquad (4.2)$$

где $\mathbf{C_v}$ - молярная теплоемкость при постоянном объеме.

$$\mathbf{C_v = \frac{i}{2} R}. \qquad (4.3)$$

Связь между молярной и удельной теплоемкостью

$$\mathbf{C_v = C'_v \mu}. \qquad (4.4)$$

где i - число степеней свободы, $\mathbf{C'_v}$ - удельная теплоемкость, для одноатомного газа i = 3, для двухатомного газа i = 5. Молярная теплоемкость при постоянном давлении

$$\mathbf{C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} R}. \ (4.5)$$

Первый закон термодинамики и формулы работ изопроцессов имеет вид:

Для изохорического процесса $\mathbf{dU = +d'Q}$. $\mathbf{d'A = 0}$. **(4.6)**

Для изотермического процесса

$$\mathbf{d'Q = d'A}. \quad \mathbf{dU = 0}; \qquad \mathbf{A = \frac{m}{\mu} RT \ell n \frac{V_2}{V_1}}. \qquad (4.7)$$

Для изобарического процесса

$$\mathbf{dU = d'Q + d'A}; \quad \mathbf{A = P(V_2 - V_1)}. \qquad (4.8)$$

Для адиабатического процесса

$$\mathbf{dU = -d'A}; \quad \mathbf{d'Q = 0}; \qquad \mathbf{A = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]}. \qquad \mathbf{(4.9)}$$

Адиабатический процесс подчиняется уравнениям Пуассона : $\mathbf{T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}}$; (4.10)

$$\mathbf{P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}}; \qquad (4.11)$$

$$\mathbf{\frac{T_1}{P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_2}{P_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}, \qquad (4.12)$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$.

Теплоты, полученные газом при постоянном объеме и при постоянном давлении соответственно равны

$$Q_V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T, \qquad (4.13)$$

$$Q_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T. \qquad (4.14)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Внутренняя энергия киломоля идеального газа при его изобарическом охлаждении от 600 до 50 °С изменилась на $7.2 \cdot 10^6$ Дж. Найти количество выделившейся теплоты, работу и число степеней свободы молекул газа.

ДАНО:

$\frac{m}{\mu} = 1$ кмоль

$t_1 = 600$ °С

$t_2 = 50$ °С

$\Delta U = 7.2 \cdot 10^6$ Дж

Q - ?

ΔA - ?

i - ?

РЕШЕНИЕ:

Изменение внутренней энергии идеального газа найдем по формуле (4.2)

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T, \qquad (1)$$

$$i = \frac{2\mu \Delta U}{m R \Delta T}, \qquad (2)$$

$$i = \frac{2 \cdot 7.2 \cdot 10^6 \text{Дж}}{1\text{кмоль} \cdot 8.31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} \cdot 550\,\text{К}} = \frac{144}{45.7} = 3$$

По формуле (4.14) найдем теплоту Q_p

$$Q_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T. \qquad (3)$$

$$C_p = C_V + R = R\frac{i+2}{2}.$$ Отсюда

$$Q_p = \frac{m}{\mu}R\frac{i+2}{2}\Delta T = 1\text{кмоль}\cdot 8.31\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль}\cdot\text{К}}\cdot 2.5\cdot 550\,\text{К} =$$

$$= 11.4\cdot 10^6\,\text{Дж.}$$

Работу при изобарическом процессе найдем по формуле (4.8)

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

Из разности уравнений Менделеева-Клапейрона для двух состояний $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$, $p_1 = p_2 = p$

получим $p(V_1 - V_2) = \frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2)$.

Пользуясь последней формулой, получим $A = \frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2)$.

$$A = 1\text{кмоль}\cdot 8.31\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль}\cdot\text{К}}\cdot 550\,\text{К} = 45.6\cdot 10^5\,\text{Дж.} =$$

$$= 4.56\cdot 10^6\,\text{Дж.}$$

Пример 2. Кислород, занимавший объем 10 л при давлении 1 ат, был адиабатически сжат до объема 2 л. Определить давление после сжатия.

ДАНО:

V_1 = 10 л =10^{-2} м^3

V_2 =$2\cdot 10^{-3}$ м^3

p_1 = 1 ат = 10^5 Н/м^2

i = 5

---

p_2 - ?

РЕШЕНИЕ

Из формулы (4.11) при адиабатическом процессе имеем

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma.$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1.4.$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma.$$

$$p_2 = 10^5\ \frac{Н}{м^2}\left(\frac{10^{-2}\,м^3}{2\cdot 10^{-3}\,м^3}\right)^{1.4} = 10^5\ \frac{Н}{м^2}\,5^{1.4} = 9.5\cdot 10^5\ \frac{Н}{м^2}.$$

Ответ: $p_2 = 9.5\cdot10^5$ Па.

Пример 3. Необходимо сжать 10 л воздуха до объема 1 л. Как выгоднее сжать его: адиабатически или изотермически?

ДАНО:

i =5

$V_1 = 10$ л $=10^{-2}$ м^3

$V_2 = 10^{-3}$ м^3

$\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль

$\dfrac{A_{изот}}{A_{адиаб}}$ – ?

РЕШЕНИЕ:

Чтобы проверить, как выгодно сжать воздух, напишем формулы работ адиабатического и изотермического процессов (4.9), (4.7):

$$A_{изот} = \frac{m}{\mu} RT\,\ell n\frac{V_2}{V_1}, \qquad (1)$$

$$A_{адиаб} = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (2)$$

Разделим (1) на (2) и получим

$$\frac{A_{изот}}{A_{адиаб}} = \frac{\frac{m}{\mu}RT\,\ell n\frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{\mu}\frac{RT}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]} = \frac{(\gamma-1)\cdot\ell n\frac{V_2}{V_1}}{\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]}.$$

$$\frac{A_{изот}}{A_{адиаб}} = \frac{0.4\cdot 2.3}{1-10^{0.4}} = 0.615.$$

$$A_{изот} = 0.615\ A_{адиаб}.$$

Ответ: Выгодно сжать воздух изотермически.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Найти полную энергию молекул двухатомного газа, находящихся в объеме 10 л при давлении 2 атм. Какую часть этой энергии составляет энергия поступательного движения молекул?

4.2. Найти удельную теплоемкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из 4 кмолей CO и 0,2 кг кислорода.

4.3. В закрытом сосуде находится 20 г азота под давлением 1 атм при температуре 300 К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Найти: 1) до какой температуры был нагрет газ; 2) каков объем сосуда; 3) какое количество тепла сообщено газу?

4.4. Азот массой 200 г расширяется изотермически при температуре 280 К, причем объем газа увеличился в два раза. Найти: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) совершенную при расширении газа работу; 3) теплоту, полученную газом.

4.5. Водород массой m = 10 г нагрели на ΔT = 200 К, причем газу была передана теплота $4 \cdot 10^4$ Дж. Найти изменение внутренней энергии водорода и совершенную им работу.

4.6. До какой температуры охладится водород, находящийся при температуре 17 °С, если он расширяется адиабатически от объема 20 л до объема 60 л.

4.7. При адиабатическом сжатии кислорода массой 40 г его энергия (внутренняя) увеличилась на $8 \cdot 10^3$ Дж и температура повысилась до 900 К. Найти: 1) начальную температуру; 2) конечное давление газа, если начальное давление равно 1 атм.

4.8. Кислород массой 2 кг, нагретый от температуры 300 К до 500 К, сохраняет неизменный объем. Найти теплоту, сообщенную газу, изменение внутренней энергии и совершенную газом работу.

4.9. Гелий массой 1 кг был нагрет на ΔT = 100 К при постоянном давлении. Определить теплоту, переданную газу, работу расширения и изменение внутренней энергии газа.

4.10. Углекислый газ, находившийся под давлением P_1 = 1 атм при температуре T_1 = 290 К, был адиабатически сжат до давления P_2 = 5 атм. Найти температуру газа после сжатия.

§ 5. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.

1. Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}, \tag{5.1}$$

холодильный коэффициент

$$\eta_x = \frac{Q_2}{A} = \frac{1-\eta}{\eta}, \tag{5.1a}$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное газом от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, переданное газом холодильнику; **A** - работа.

2. КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{5.2}$$

где T_1 - температура нагревателя, T_2 - температура охладителя.

3. Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}; \qquad \Delta S = S_2 - S_1. \tag{5.3}$$

4. Изменение энтропии при нагревании массы вещества с удельной теплоемкостью **C**

$$\Delta S = mC \ell n \frac{T_2}{T_1}. \tag{5.4}$$

5. Изменение энтропии для 1 кмоля газа

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU - PdV}{T} = \int_1^2 \frac{C_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{PdV}{T} = \\ = C_V \ell n \frac{T_2}{T_1} + R \ell n \frac{V_2}{V_1}. \tag{5.5}$$

Изменение энтропии для любого количества газа

$$\Delta S=\frac{m}{\mu}C_V\ell n\frac{T_2}{T_1}+\frac{m}{\mu}R\ell n\frac{V_2}{V_1}. \qquad (5.5а)$$

Изменение энтропии при превращении твердых тел, взятых при температурах ниже температур плавления, в парообразное состояние определяют по формуле

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2+\Delta S_3+\Delta S_4, \qquad (5.6)$$

ΔS_1 - изменение энтропии при нагревании твердого тела от начальной температуры T_0 до температуры плавления $T_{пл}$:

$$\Delta S_1=\int\frac{dQ_1}{T}=\int_{T_0}^{T_{пл}}\frac{C_1 m dT}{T}=C_1 m\ell n\frac{T_{пл}}{T_0}; \qquad (5.7)$$

ΔS_2 - изменение энтропии в процессе плавления:

$$\Delta S_2=\int\frac{dQ_2}{T_{пл}}=\int_0^m\frac{\lambda dm}{T_{пл}}=\frac{\lambda m}{T_{пл}}; \qquad (5.8)$$

ΔS_3 - изменение энтропии при ее нагревании от $T_{пл}$ до температуры кипения $T_к$:

$$\Delta S_3=\int\frac{dQ_3}{T}=\int_{Tпл}^{Tк}\frac{C_2 m dT}{T}=C_2 m\ell n\frac{T_к}{T_{пл}}, \qquad (5.9)$$

ΔS_4 - изменение энтропии в ходе парообразования:

$$\Delta S_4=\int\frac{dQ_4}{T_к}=\int_0^m\frac{L dm}{T_к}=\frac{Lm}{T_к}. \qquad (5.10)$$

В формулах (5.7) - (5.10) C_1 - удельная теплоемкость твердого тела; λ - удельная теплота плавления; C_2 - удельная теплоемкость жидкости; L - удельная теплота парообразования.

Примеры решения задач

Пример 1. Идеальная тепловая машина работает по циклу

Карно и за один цикл от нагревателя получает $2.1 \cdot 10^3$ Дж тепла. Температура нагревателя 500 К, а температура холодильника 400К. Найти работу, совершаемую машиной за один цикл, и количество тепла, отдаваемого холодильнику за один цикл.

ДАНО:	РЕШЕНИЕ:
$Q_1 = 2.1 \cdot 10^3$ Дж $T_1 = 500$ K $T_2 = 400$ K	Задача на цикл Карно. Поэтому напишем формулы (5.1), (5.2). КПД этого цикла :
A - ? Q_2 -?	

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}, \quad (2)$$

где Q_1 - количество теплоты, полученной от нагревателя рабочим телом, а Q_2 - количество теплоты, отданной холодильнику.

Из формулы (1) найдем η.

Подставляя численные значения, получим:

$$\eta = \frac{500K - 400K}{500K} = \frac{100}{500} = 0.2.$$

Из формулы (2) имеем $A = \eta Q_1$.

$$A = 0.2 \cdot 2.1 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 4.2 \cdot 10^2 \text{ Дж}.$$

Из (2) видно, что $A = Q_1 - Q_2$

$$Q_2 = Q_1 - A = 2.1 \cdot 10^3 \text{ Дж} - 0.42 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 1.68 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Ответ:

$$A = 4.2 \cdot 10^2 \text{ Дж}$$

$$Q_2 = 1.68 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Пример 2. Найти изменение энтропии при превращении 200 г воды, взятой при 20 °C, в пар при 100 °C.

ДАНО:	РЕШЕНИЕ:
m = 200 г = 0,2 кг **t_1** = 20 °C; T_1 = 293 К **t_2** = 100 °C; T_2 = 373 К **C** = 4190 Дж/кг·К **L** = $22.6\cdot10^5$ Дж/кг **ΔS** - ?	Задача на изменение энтропии **ΔS** (5.6). В данном случае **ΔS** = **ΔS_1** + **ΔS_2,** (1) где **ΔS_1** - изменение энтропии при нагревании воды от **t_1** до **t_2,** (5.9);

ΔS_2 - изменение энтропии при превращении воды в пар при постоянной температуре **t_2 ,** (5.10).

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ_1}{T} = Cm\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = Cm\,\ell n\frac{T_2}{T_1}\ , \qquad (2)$$

где **C** - удельная теплоемкость воды.

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ_2}{T_2} = \int \frac{dLm}{T_2} = \frac{L}{T_2}\int_0^m dm = \frac{Lm}{T_2}\ , \qquad (3)$$

где **L** - удельная теплота парообразования. Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\Delta S = Cm\,\ell n\frac{T_2}{T_1} + \frac{Lm}{T_2}\ . \qquad (4)$$

Подставим численные значения в формулу (4):

$$\Delta S = 0.2\,кг\cdot 4.19\cdot10^3\,\frac{Дж}{кг\cdot К}\cdot 2.3\,\ell g\,\frac{373}{293} + \frac{22.6\cdot10^5\,\frac{Дж}{кг}\cdot 0.2\,кг}{373\,К} =$$

$$= 2.6\cdot10^2\,\frac{Дж}{К} + 1.21\cdot10^3\,\frac{Дж}{К} = 14.7\cdot10^2\,\frac{Дж}{К}.$$

Ответ: $\Delta S = 14.7\cdot10^2\,\frac{Дж}{К}$.

Пример 3. Найти изменение энтропии 10 г кислорода при переходе от объема 10 л при давлении $4\cdot10^5$ Па к объему 50 л при давлении $5\cdot10^4$ Па.

ДАНО:

$\mathbf{m}$ = 10 г =10^{-2} кг

$\boldsymbol{\mu}$ = $32\cdot10^{-3}$ кг/моль

$\mathbf{V_1}$ = 10 л = 10^{-2} м^3

$\mathbf{V_1}$ = 50 л =$5\cdot10^{-2}$ м^3

$\mathbf{P_1}$ = $4\cdot10^5$ Па

$\mathbf{P_2}$ = $5\cdot10^4$ Па

$\Delta\mathbf{S}$ - ?

РЕШЕНИЕ:

Запишем выражение для изменения энтропии:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad (1)$$

Согласно первому закону термодинамики (4.1),

$$d'Q = dU + d'A, \qquad (2)$$

где $dU = \frac{m}{\mu}C_V dT$, $\quad d'A = PdV$.

Тогда
$$d'Q = \frac{m}{\mu}C_V dT + PdV. \qquad (3)$$

Из закона Менделеева-Клапейрона

$$\frac{P}{T} = \frac{m}{\mu}\frac{R}{V}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$d'Q = \frac{m}{\mu}C_V dT + \frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в (1) и получим:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}C_V\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu}R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}C_V\ell n\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu}R\ell n\frac{V_2}{V_1}.$$

Так как из объединенного газового закона следует

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}; \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}, \text{ то}$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}C_V\left(\ell n\frac{P_2}{P_1} + \ell n\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{m}{\mu}R\ell n\frac{V_2}{V_1} =$$
$$= \frac{m}{\mu}C_V\ell n\frac{P_2}{P_1} + \frac{m}{\mu}R\ell n\frac{V_2}{V_1}\left(\frac{i}{2}+1\right). \qquad (6)$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\Delta S = \frac{10^{-2}\,кг}{32\cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}}\,\frac{5}{2}\cdot 8.31\,\frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot 2.3\ell g\frac{5\cdot 10^{4}}{4\cdot 10^{5}} +$$

$$+\frac{10^{-2}\,кг}{32\cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}}\cdot 8.31\,\frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot 2.3\ell g5\cdot 3.5 =$$

$$=\left(1.5\ell g0.125 + 2.1\ell g5\right)10\,\frac{Дж}{К} = \left(-1.35+1.47\right)10\,\frac{Дж}{К} = 1.2\,\frac{Дж}{К}.$$

Ответ: **ΔS** = 1.2 Дж/К.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить КПД цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа, равная $4\cdot 10^3$ Дж, и холодильнику было передано $1{,}34\cdot 10^4$ Дж.

5.2. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура охладителя. Нагреватель передал газу теплоту $4.2\cdot 10^4$ Дж. Какую работу совершил газ?

5.3. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя теплоту **Q** = $1.7\cdot 10^4$ Дж. Какую работу совершил газ за цикл, если термический КПД η = 0.1 ?

5.4. Кусок льда массой 200 г имел температуру -10 °С. Он был превращен в воду, которая была нагрета до 10 °С. Определить изменение энтропии.

5.5. Найти изменение энтропии при переходе 20 г кислорода от объема в 15 л при температуре 40 °С к объему 45 л при температуре 400 °С.

5.6. В результате нагревания 22 г азота его абсолютная температура увеличилась в 1,2 раза, а энтропия на 4,19 Дж/К. При каких условиях происходило нагревание (при **V** = **const** или **p** = **const**)?

5.7. Газ, совершающий цикл Карно, отдаёт охладителю две трети теплоты, полученной от нагревателя. Температура охладителя 0 °С. Определить температуру нагревателя.

5.8. Вычислить приращение энтропии двух киломолей идеального трехатомного газа при нагревании его от 0 до 500 °С, если процесс нагревания происходит: 1) при постоянном объеме; 2) при постоянном давлении.

5.9. Найти изменение энтропии при изотермическом расширении 14 г азота от 5 до 6 л.

5.10. Найти изменение энтропии при расширении 0,2 кг водорода от объема 20 л до объема 60 л, если процесс происходит: 1) при постоянном давлении; 2) при постоянной температуре.

§ 6. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. НАСЫЩЕННЫЕ ПАРЫ

Уравнение состояния реальных газов для одного киломоля газа имеет вид:

$$\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{V}_o^2}\right)(\mathbf{V}_o-\mathbf{b})=\mathbf{RT}. \quad (6.1)$$

Это уравнение получено Ван-дер-Ваальсом и носит его имя.

$\mathbf{V_o}$ - объем одного киломоля реального газа;

a, **b** - поправки Ван-дер-Ваальса, различные для различных газов;

p - давление, **T** - абсолютная температура, **R** - универсальная газовая постоянная.

Объем любой массы газа $$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{m}}{\mu}\mathbf{V_0}. \quad (6.2)$$

Подставляя значение $\mathbf{V_0}$, найденное из (6.2), в (6.1), получим уравнение Ван-дер-Ваальса для любого количества газа

$$\left(p+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT. \quad (6.3)$$

В этом уравнении $\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}=p_i$ - давление, обусловленное силами взаимодействия молекул.

Постоянные **a** и **b** данного газа связаны с критическими параметрами следующими соотношениями:

$$V_{ок}=3b; \qquad p_k=\frac{a}{27b^2}; \qquad T_k=\frac{8a}{27Rb}. \qquad (6.4)$$

Поправка **b** связана с объемом молекул

$$b=4V'N_A, \qquad (6.5)$$

где $V'=\frac{4}{3}\pi r^3$ - объем одной молекулы; N_A - число Авогадро.

Если ввести приведенные величины

$$\tau=\frac{T}{T_k}; \qquad \pi=\frac{p}{p_k}; \quad \omega=\frac{V_0}{V_{0k}}, \qquad (6.6)$$

то уравнение Ван-дер-Ваальса для одного киломоля примет вид:

$$\left(\pi+\frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega-1)=8\tau. \qquad (6.7)$$

Внутренняя энергия одного киломоля реального газа

$$U=C_V T-\frac{a}{V_0}. \qquad (6.8)$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U=C_V\Delta T-\left(\frac{a}{V_{01}}-\frac{a}{V_{02}}\right)=C_V\Delta T-a\left(\frac{1}{V_{01}}-\frac{1}{V_{02}}\right). \qquad (6.9)$$

Если $\Delta U=0$, тогда $\qquad C_V\Delta T=a\left(\frac{1}{V_{01}}-\frac{1}{V_{02}}\right). \qquad (6.10)$

Абсолютной влажностью называется парциальное давление водяных паров, находящихся в воздухе.

Относительной влажностью называется отношение абсолютной влажности к парциальному давлению водяных паров, насыщающих пространство при данной температуре:

$$\mathbf{f = \frac{p}{p_н} \cdot 100\%}. \qquad (6.11)$$

Зависимость давления насыщенного пара $\mathbf{p_н}$ от температуры задается уравнением Клапейрона-Клаузиуса:

$$\mathbf{\frac{dp_н}{dT} = \frac{L}{T(V_п - V_ж)}}, \qquad (6.12)$$

где **L** - удельная теплота парообразования;

$\mathbf{V_п}$ - удельный объем пара; $\mathbf{V_ж}$ - удельный объем жидкости.

Добавочное давление насыщенного пара над изогнутой поверхностью жидкости равно

$$\mathbf{\Delta p = p_1 - p_0 = \pm \frac{2\sigma\rho_п}{r\rho_ж}}. \qquad (6.13)$$

$\mathbf{p_1}$ - давление насыщенного пара над мениском;

$\mathbf{p_0}$ - давление насыщенного пара над плоской поверхностью жидкости;

$\mathbf{\rho_п}$ - плотность насыщенного пара;

$\mathbf{\rho_ж}$ - плотность жидкости;

r - радиус кривизны поверхности жидкости.

Примеры решения задач

Пример 1. Какую температуру имеют 20 г водорода, занимающего объем 0.04 м^3 при давлении 5 атм. Газ рассматривать как: 1) идеальный; 2) реальный.

ДАНО:

m = 20 г = 2·10^{-2} кг
μ = 2 кг/кмоль
p = 5·10^5 Н/м^2
$\mathbf{a = 2.44\cdot 10^4\ \dfrac{Н\cdot м^4}{кмоль^2}}$
$\mathbf{b = 2.65\cdot 10^{-2}\ \dfrac{м^3}{кмоль}}$
V = 40·10^{-3} м^3

Tр - ?
Tи - ?

РЕШЕНИЕ:

Из уравнения Ван-дер-Ваальса для любого количество газа

$$\left(p+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT_р, \quad (1)$$

получим

$$T_р=\frac{\left(p+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)}{\frac{m}{\mu}R}. \quad (2)$$

Значения **a** и **b** находим по таблице № 5.

Для идеального газа $T_и$ находим из уравнения состояния

$$pV=\frac{m}{\mu}RT_и, \quad (3)$$

$$T_и=\frac{pV}{\frac{m}{\mu}R}. \quad (4)$$

Подставляя численные значения в (2) и (4), получим:

$$T_и=\frac{5\cdot 10^5\cdot 40\cdot 10^{-3}\ \frac{Н}{м^2}м^3}{10^{-2}\ \frac{кг}{\frac{кг}{кмоль}}\cdot 8.31\cdot 10^3\ \frac{Дж}{кмоль\cdot К}}=240\,К$$

$$T_р=\frac{\left(5\cdot 10^5+\frac{4\cdot 10^{-4}}{4}\cdot\frac{2.44\cdot 10^4}{1.6\cdot 10^{-3}}\right)\left(40\cdot 10^{-3}-\frac{2\cdot 10^{-2}}{2}\cdot 2.63\cdot 10^{-2}\right)}{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2}\cdot 8.31\cdot 10^3}=$$

$$=\frac{5\cdot 10^5\cdot 39.7\cdot 10^{-3}}{83.1}=\frac{19800}{83.1}=238\,К.$$

Ответ: $\mathbf{T_и = 240\,K,\ T_p = 238\,K}$.

Пример 2. Найти коэффициент диффузии гелия при температуре t = 27 °С и давлении p = 2·10^5 Н/м^2. Эффективный диаметр гелия вычислить, зная, что $T_к$ = 5.2 К, p_k = 2.25·10^5 Н/м^2.

ДАНО:	РЕШЕНИЕ:
t = 27 °С T = 300 К p = 2.10^5 Н/м^2 $T_к$ = 5.2 К p_k = 2.25·10^5 Н/м^2 μ = 4 кг/кмоль	Коэффициент диффузии найдем по формуле (3.4)
D -?	

$$\mathbf{D = \frac{1}{3} v\bar{\lambda}}\ . \qquad (1)$$

$\bar{\lambda}$ и $\bar{v}$ найдем по формулам (3.2), (2.4).

$$\bar{\lambda} = \frac{\mathbf{kT}}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \mathbf{p}}\ . \qquad (2)$$

Разделив $p_к$ на $T_к$ в формулах (6.4), получим

$$\mathbf{b = \frac{T_k R}{8p_k}}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}\ . \qquad (4)$$

Из (6.5) $$\mathbf{b = 4v'N_A = 4\frac{4}{3}\pi r^3 N_A}\ . \qquad (5)$$

Приравнивая (3) и (5), найдем радиус молекулы гелия:

$$\mathbf{\frac{T_k R}{8p_k} = \frac{16}{3}\pi r^3 N_A},$$

$$\mathbf{r = \sqrt[3]{\frac{3T_k R}{8\cdot 16 p_k \pi N_A}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{T_k k}{p_k \pi}}}\ ,$$

$$\mathbf{\sigma = 2r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{T_k k}{\pi p_k}}}\ .$$

Зная σ, по формуле (1), подставляя (2) и (4), найдем:

$$\mathbf{D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}\cdot\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}}}.$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{5.2\cdot 1.38\cdot 10^{-23}}{3.14\cdot 2.25\cdot 10^{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1.52\cdot 10^{-30}} = \frac{5.32\cdot 10^{-10}}{2}2.6\cdot 10^{-10}\,\text{м}$$

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8\cdot 8.31\cdot 10^{3}\,\frac{\text{Дж}}{\text{кмоль}\cdot\text{К}}300\text{К}}{3.14\cdot 4\,\frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}}\times\frac{1.38\cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\cdot 300\text{К}}{1.4\cdot 3.14\cdot 4\cdot 10^{-20}\text{м}^2\cdot 2\cdot 10^{5}\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}}$$

$$D = \frac{1}{3}\frac{1.26\cdot 10^{3}\cdot 10^{-6}}{2\cdot 4}\frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{126\cdot 10^{-5}}{24}\frac{\text{м}^2}{\text{с}} = 5.25\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Ответ: $D = 5.25\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Пример 3. 0,5 кмоля трехатомного газа адиабатически расширяется в пустоту от $\mathbf{V_1} = 0.5$ м^3 до $\mathbf{V_2} = 3$ м^3. Температура газа при этом понижается на 12,2°. Найти из этих данных постоянную **a**, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

ДАНО:

$\frac{m}{\mu} = 0.5\,\text{кмоль} =$

$= 500\,\text{моль}$

i = 6

$V_1 = 0.5$ м^3

$V_2 = 3$ м^3

$\Delta T = 12.2$ К

$d'Q = 0$

---

a - ?

РЕШЕНИЕ:

Напишем формулу изменения внутренней энергии (6.9) для любого количества реального газа:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T - \frac{m}{\mu}a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \quad (1)$$

Так как процесс протекает в замкнутой системе, то из первого закона термодинамики вытекает, что $\Delta U = 0$. Тогда (1) запишется

$$\frac{m}{\mu}C_V\Delta T = \frac{m^2}{\mu^2}a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \quad (2)$$

Отсюда $$\mathbf{a = \frac{C_V \Delta T}{\frac{m}{\mu}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)}},\qquad (3)$$

где $\mathbf{C_V = \frac{i}{2} R}$.

Подставляя численные значения в (3), получим:

$$\mathbf{a = \frac{3 \cdot 8.31 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кмоль} \cdot 12.2\,К}{0.5 \frac{кмоль}{м^3}(2 - 0.33)} = \frac{302.5 \cdot 10^3}{0.835} = 3.64 \cdot 10^5 \ \frac{Н \cdot м^4}{кмоль^2}}\ .$$

$$\textbf{Ответ: } \mathbf{a = 3.64 \cdot 10^5 \ \frac{Н \cdot м^4}{кмоль^2}}\ .$$

Пример 4. 1 кмоль гелия занимает объем 0.237 м^3 при температуре **t = - 200 °C**. Найти давление газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенных величинах.

ДАНО:

$\mathbf{\frac{m}{\mu} = 1\,кмоль}$

V = 0.237 м^3

T = 73 К

$T_к$ = 5.2 К

$p_к$ =2.3·10^5 Н/м^2

b= =2.34·10^{-2} м^3/кмоль

---

p - ?

РЕШЕНИЕ:

Напишем уравнение Ван-дер-Ваальса (6.7) в приведенных величинах:

$$\mathbf{\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau}\ .\qquad (1)$$

Приведенные величины согласно (6.6) равны:

$$\mathbf{\tau = \frac{T}{T_k}}; \quad \mathbf{\pi = \frac{p}{p_k}}; \quad \mathbf{\omega = \frac{V_0}{V_{0k}}}.\qquad (2)$$

$p_к$, **$T_к$** возьмем из таблицы критических параметров, а **$V_к$ = 3b**, **b** - тоже из таблицы № 5.

Тогда $$\mathbf{\pi = \frac{p}{p_k}};$$

$$\omega = \frac{0.237\text{м}^3}{3b} = \frac{0.237\text{м}^3}{3\cdot 2.34\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}} = 3.38;$$

$$\tau = \frac{T}{T_k} = \frac{73\,\text{К}}{5.2\,\text{К}} = 14.$$

Подставляя численные значения в (1), получим:

$$\left(\pi + \frac{3}{11.4}\right)(10.14 - 1) = 112; \qquad \pi + 0.262 = 12.3;\ \pi = 12;$$

$$\frac{p}{p_k} = 12;\ p = 2.76\cdot 10^6\ \text{Па}.$$

Ответ: $p = 2.76\cdot 10^6$ Па.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Какую температуру имеют 4 г кислорода, занимающего объем 100 см^3 при давлении 30 атм? Газ рассматривать как: 1) идеальный; 2) реальный.

6.2. Найти эффективный диаметр молекулы азота двумя способами: 1) по данному значению средней длины свободного пробега молекул при нормальных условиях $\overline{\lambda} = 10^{-7}$ см, 2) по известной величине постоянной b в уравнении Ван-дер-Ваальса.

6.3. Найти давление, обусловленное силами взаимодействия молекул, заключенных в одном кмоле газа при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление для этого газа равны, соответственно, $T_к = 417$ К, $p_к = 76\cdot 10^5$ Па.

6.4. Найти внутреннюю энергию углекислого газа массой 44 г при нормальном давлении и температуре, рассматривая газ: 1) как идеальный; 2) как реальный.

6.5. 1 кмоль кислорода занимает объем 56 л при давлении 920 атм. Найти температуру газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенных величинах.

6.6. Для некоторого газа поправка **a** в уравнении Ван-дер-Ваальса равна $45.3 \cdot 10^4$ Дж·м^3/кмоль, а критическая температура 282.7 К. Определить эффективный диаметр молекулы газа.

6.7. При давлении $1.2 \cdot 10^5$ Н/м^2 углекислый газ массой 8.8 кг занимает объем 4,2 м^3. Определить температуру газа, рассматривая газ как: 1) идеальный; 2) реальный. Поправка **a** и **b** для углекислого газа, соответственно, равны $36.4 \cdot 10^4$ Дж·м^3/кмоль^2 и 0.043 м^3/кмоль.

6.8. Определить массу водяных паров в 2 м^3 воздуха при температуре 40 °С и относительной влажности 80 %.

6.9. 1 г водяного пара занимает объем 20 л при температуре 60 °С. 1) Какова при этом относительная влажность? 2) Какое количество пара сконденсируется, если изотермически уменьшить объем вдвое?

6.10. Каково давление ртутных паров вблизи капельки ртути при температуре 21°С, если радиус капельки $8 \cdot 10^{-6}$ см? Давление насыщенных паров ртути при 20 °С равно 0,0011 мм рт. ст.

7. ЖИДКОСТИ

Коэффициент поверхностного натяжения жидкости $\boldsymbol{\sigma}$ численно равен силе, приложенной к единице длины края поверхности жидкости

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{F}}{\ell}. \tag{7.1}$$

Работа внешних сил при изотермическом увеличении поверхности жидкости $\mathbf{\Delta A} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{\Delta S}$. (7.2)

Давление Лапласа под искривленной поверхностью жидкости

$$\mathbf{\Delta p} = \boldsymbol{\sigma}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_2}}\right). \tag{7.3}$$

В случае сферической поверхности жидкости $\mathbf{R_1} = \mathbf{R_2} = \mathbf{R}$

и

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \tag{7.4}$$

В случае, когда жидкость находится между плоскопараллельными пластинками

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R}. \tag{7.5}$$

Высота поднятия смачивающей жидкости в капиллярной трубке радиусом r

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}, \tag{7.6}$$

где θ - краевой угол; ρ - плотность жидкости,

При полном смачивании жидкостью стенки трубки $\theta = 0$.

При полном несмачивании жидкостью стенки трубки $\theta = \pi$.

Осмотическое давление для недиссоциирующих веществ

$$p_{осм} = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = CRT, \tag{7.7}$$

где $C = \dfrac{m}{\mu v}$ - число киломолей растворенного вещества в единице объема раствора.

Осмотическое давление для диссоциирующих растворов

$$p'_{осм} = p_{осм}\left[1 + \kappa(i-1)\right], \tag{7.8}$$

где κ - степень диссоциации, показывающая долю диссоциировавших молекул растворенного вещества, каждая из которых диссоциируется на i ионов.

Давление насыщенных паров над раствором меньше, чем над чистым растворителем.

При достаточно малой концентрации раствора относительное уменьшение давления насыщенного пара над раствором определяется законом Рауля:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{Z'}{Z + Z'}, \qquad (7.9)$$

где $\mathbf{p_0}$ - давление насыщенного пара над чистым растворителем; $\mathbf{p}$ - давление насыщенного пара над раствором; $\mathbf{Z'}$ - число молей (киломолей) растворенного вещества; $\mathbf{Z}$ - число молей жидкости.

Примеры решения задач

Пример 1. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы разбить сферическую каплю ртути радиусом 3 мм на две одинаковые капли?

ДАНО:	РЕШЕНИЕ:
$\mathbf{r} = 3$ мм $= 3\cdot 10^{-3}$ м $\boldsymbol{\sigma} = 0.5$ Н/м $\mathbf{V = 2V_1}$ **A -?**	Совершенная работа идет на изменение суммарной свободной поверхностной энергии двух капель по сравнению с поверхностной энергией большой капли (7.2).

$$A = E_2 - E_1 = \sigma S_2 - \sigma S_1 = \sigma(S_2 - S_1). \qquad (1)$$

$\mathbf{S_2}$ - суммарная поверхность маленьких капель $\mathbf{S_2 = 2S}$, где $\mathbf{S = 4\pi r_1^2}$ (2), r_1 - радиус маленькой капли, $\mathbf{S_1}$ - поверхность большой капли. $\mathbf{S_1 = 4\pi r^2}$. (3)

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$A = \sigma \cdot 4\pi\left(2r_1^2 - r^2\right). \qquad (4)$$

Для определения радиуса маленькой капли воспользуемся тем, что объем большой капли $\mathbf{V = 2V_1}$, где $\mathbf{V_1}$ - объем маленькой капли.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\frac{4}{3}\pi r_1^3; \quad r_1^3 = \frac{r^3}{2}; \quad r_1 = r\sqrt[3]{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Подставляя значение $\mathbf{r_1}$ в (4), получим:

$$\mathbf{A = 4\pi\sigma\left(2r^2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - r^2\right) = 4\pi\sigma r^2\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1\right) = 4\pi\sigma r^2\left(\frac{2}{1.59} - 1\right) =}$$

$$\mathbf{= 4\cdot 3.14\cdot 0.5\frac{Н}{м}\cdot 9\cdot 10^{-6}м^2\cdot 0.26 = 14.7\cdot 10^{-6}Дж = 1.47\cdot 10^{-5}Дж}$$

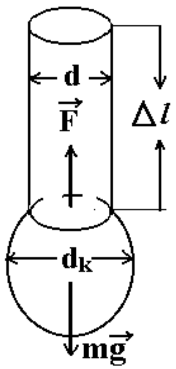
Ответ: $\mathbf{A = 1.47\cdot 10^{-5}}$ **Дж**.

Пример 2. При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром 1 мм образовалось 20 капель свинца. На сколько укоротилось проволока? Коэффициент поверхностного натяжения жидкого свинца 0,47 Н/м. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным диаметру проволоки.

ДАНО:

$\mathbf{d}$ = 1 мм = $\mathbf{10^{-3}}$ м
$\mathbf{n = 20}$
$\mathbf{\rho}$ = 11300 кг/м$\mathbf{^3}$
$\mathbf{\sigma}$= 0.47 Н/м
$\mathbf{d = d_k}$

$\Delta\ell - ?$



РЕШЕНИЕ:

Сделаем чертеж и покажем какие силы действуют на каплю. На каплю действует сила поверхностного натяжения **F** и сила тяжести **mg**. Капля отрывается в момент, когда **F ≤ mg**.

$$\mathbf{m_1 g = 2\pi r\sigma}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{m_1 = \frac{2\pi r\sigma}{g}}. \quad \mathbf{m_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g},$$

$\mathbf{m_1}$ - масса одной капли.

Масса **n** капель $\mathbf{M = nm_1}$. (2)

С другой стороны $\mathbf{M = \pi r^2\Delta\ell\rho}$. (3)

Приравнивая (2) и (3), получим:

$$\mathbf{nm_1 = \pi r^2\Delta\ell\rho}. \qquad (4)$$

$$n\frac{2\pi r\sigma}{g} = \pi r^2 \Delta\ell\rho\,; \qquad \Delta\ell = \frac{2n\sigma}{rg\rho}\,;$$

$$\Delta\ell = \frac{2\cdot 20\cdot 0.47\,Н/м}{\frac{10^{-3}}{2}\,м\cdot 10\,\frac{м}{с^2}\cdot 11.3\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}} = \frac{3.76\,м}{11.3} = 33.4\,см = 0.334\,м$$

Ответ: $\Delta\ell = 0.334\,м$.

Пример 3. В глицерине на глубине 10 см находится пузырек воздуха радиусом 0,02 мм. Давление атмосферы 740 мм рт. ст. Определить давление воздуха внутри пузырька.

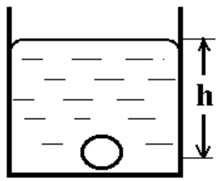
ДАНО:

$\rho = 1200$ **кг/м**^{3}
$h = 10$ **см** $= 0.1$ **м**
$r = 2\cdot 10^{-5}$ **м**
$P_{ат} = 740$ **мм рт. ст.** $=$
$= 133.3\cdot 740$ **Н/м**^{2} $=$
$= 9.82\cdot 10^4$ **Н/м**^{2}
$\sigma = 0.064$ **Н/м**

---

p - ?

РЕШЕНИЕ:



Давление внутри пузырька складывается из атмосферного, гидростатического и лапласовского давления:

$$p = p_{ат} + \rho g h + \frac{2\sigma}{r}. \qquad (1)$$

Подставляя численные значения, найдем:

$$p = 9.82\cdot 10^4\,\frac{Н}{м^2} + 1.2\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}\cdot 10\,\frac{м}{с^2}\cdot 0.1м + \frac{2\cdot 6.4\cdot 10^{-2}\,\frac{Н}{м}}{2\cdot 10^{-5}м} =$$

$$= \left(9.82\cdot 10^4 + 1.2\cdot 10^3 + 6.4\cdot 10^3\right)\frac{Н}{м^2} = 1.058\cdot 10^5\,\frac{Н}{м^2}$$

Ответ: $p = 1.058\cdot 10^5\,\frac{Н}{м^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Масса 200 капелек спирта, вытекающего из капилляра, **m = 1.42** г. Определить коэффициент поверхностного натяжения спирта, если диметр шейки капли в момент отрыва равен 1 мм.

7.2. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить радиус мыльного пузыря от 2 см до 6 см? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора принять равным $4.3 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

7.3. Две капли ртути радиусом 1 мм слились в большую каплю. На сколько градусов нагревается эта капля?

7.4. Воздушный пузырек диаметром 0.2 мм находится в воде на расстоянии 20 см от поверхности. Чему равно давление внутри пузыря, если атмосферное давление равно 750 мм рт. ст.?

7.5. Разность уровней жидкости в коленях U-образной трубки **Δh = 46 мм**. Диаметры каналов в коленях трубки **d_1 = 1 мм** и **d_2 = 0.2 мм**. Плотность жидкости **ρ = 0.8 г/см^3**. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

7.6. На какую высоту поднимается вода между двумя параллельными стеклянными пластинами, если расстояние между ними **d_1 = 0.1 мм**?

7.7. Определить наибольший диаметр стальной иголки, чтобы, смазанная жиром, она могла держаться в горизонтальном положении на поверхности воды.

7.8. В 1 л воды растворено 4 г поваренной соли. Степень диссоциации молекул поваренной соли равна 50 %. Найти осмотическое давление раствора при температуре 17 °С.

7.9. При растворении 10 г сахара ($C_{12}H_{22}O_{11}$) в 0.5 л воды осмотическое давление раствора $1.52 \cdot 10^5$ Н/м^2 . При какой температуре находится раствор? Диссоциация молекул сахара отсутствует.

7.10. Упругость насыщенных паров над раствором в 1.04 раза меньше упругости насыщенных паров чистой воды. Какое число молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица № 1
Некоторые физические постоянные

1. Число Авагадро	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль
2. Объем одного моля идеального газа	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ $м^3$
3. Универсальная газовая постоянная R	8,31 Дж/(моль·К)
4. Постоянная Больцмана	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

Таблица № 2
Перевод некоторых единиц в СИ

1 кГм = 9,81 Дж.	1 атм = $1{,}013 \cdot 10^{5}$ Па
1 кал = 4,19 Дж.	1 эв = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
1 мм рт. ст. = 133,3 Па.	1 л = 10^{-3} $м^3$

Таблица № 3
Эффективные диаметры молекул и атомов

1. Водород (H_2)	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м
2. Гелий (He)	$2 \cdot 10^{-10}$ м
3. Кислород (O_2)	$3 \cdot 10^{-10}$ м
4. Азот (N_2)	$3 \cdot 10^{-10}$ м

Таблица № 4
Удельная теплота парообрзования
при температуре кипения (L)

Вещество	Удельная теплота параобразования L, Дж/кг
1. Вода	$22{,}6\cdot10^5$
2. Спирт	$8{,}5\cdot10^5$
3. Ртуть	$3{,}0\cdot10^5$
4. Эфир	$3{,}5\cdot10^5$

Таблица № 5
Постоянные Ван-дер-Ваальса

Вещество	a, Дж·м^3/кмоль^2	b, м^3/кмоль
N_2	$1{,}35\cdot10^5$	0,04
O_2	$1{,}35\cdot10^5$	0,03
CO_2	$3{,}6\cdot10^5$	0,043
H_2O	$5{,}47\cdot10^5$	0,03
He	$3{,}43\cdot10^3$	0,234
H_2	$2{,}44\cdot10^4$	0,0263

Таблица № 6
Критические значения T_k и $p_к$

Вещество	T_k, К	$p_к\cdot10^6$, Н/м^2
Водяной пар (H_2O)	647	22,0
Углек. газ (CO_2)	304	7,4
Кислород O_2	154	5,07
Аргон Ar	151	4,87
Азот N_2	126	3,4
Водород H_2	33	1,3
Гелий He	5,2	0,23

Таблица № 7

Свойство некоторых жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м3	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К), при 20 °С	Коэффициент поверхностного натяжения, Н/м при 20 °С
1. Бензол	880	1720	0,03
2. Вода	1000	4190	0,073
3. Глицерин	1200	2430	0,064
4. Касторовое масло	900	1800	0,035
5. Керосин	800	2140	0,03
6. Ртуть	13600	138	0,5
7. Спирт	790	2510	0,02

Таблица № 8
Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность кг/м^3	Температура плавления, °С	Удельная теплоемкость Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, Дж/кг	Коэффициент линейного расширения, 1/К
Алюминий	2600	659	896	$3{,}22\cdot10^5$	$2{,}3\cdot10^{-5}$
Железо	7900	1530	500	$2{,}72\cdot10^5$	$1{,}2\cdot10^{-5}$
Латунь	8400	900	386	-	$1{,}9\cdot10^{-5}$
Лед	900	0	2100	$3{,}35\cdot10^5$	-
Медь	8600	1100	395	$1{,}76\cdot10^5$	$1{,}6\cdot10^{-5}$
Олово	7200	232	230	$5{,}86\cdot10^4$	$2{,}7\cdot10^{-5}$
Платина	21400	1770	117	$1{,}13\cdot10^5$	$0{,}89\cdot10^{-5}$
Пробка	200	-	2050	-	-
Свинец	11300	327	126	$2{,}26\cdot10^4$	$2{,}9\cdot10^{-5}$
Серебро	10500	960	234	$8{,}8\cdot10^4$	$1{,}9\cdot10^{-5}$
Сталь	7700	1300	460	-	$1{,}06\cdot10^{-5}$
Цинк	7000	420	391	$1{,}17\cdot10^5$	$2{,}9\cdot10^{-5}$

ОТВЕТЫ

§ 1.

1.1. $1{,}25\cdot10^5$ Па. **1.2.** $2{,}66\cdot10^5$ Па. **1.3.** $4\cdot10^{17}$.
1.4. $3{,}18\cdot10^{-2}$ кг/моль; $9{,}42\cdot10^4$ Па; $1{,}56\cdot10^5$ Па.
1.5. $8\cdot10^5$ Па; $2\cdot10^5$ Па. **1.6.** $1{,}61\cdot10^{-2}$ кг. **1.7.** $1{,}15\cdot10^{-2}$ кг/м$^{-3}$
1.8. $1{,}35\cdot10^3$ м/с. **1.9.** 0,416 кг/м^3. **1.10.** 2,4 Н/м^2.

§ 2.

2.1. $1{,}14\cdot10^4$ Па. **2.2.** $6\cdot10^3$ м. **2.3.** $9{,}35\cdot10^4$ Па. **2.4.** 965 м. **2.5.** $7{,}9\cdot10^4$ Па; $2\cdot10^{25}$ 1/м^3. **2.6.** $2\cdot10^{-3}$ кг/моль; $2{,}2\cdot10^3$ м/с; $2{,}25\cdot10^3$ м/с. **2.7.** $1{,}68\cdot10^3$ м/с; $1{,}83\cdot10^3$ м/с; $1{,}5\cdot10^3$ м/с.
2.8. 4,85%; **2.9.** 0,4%. 2.10. $4{,}85\cdot10^{15}$ 1/см^3.

§ 3.

3.1. $4{,}8\cdot10^9$ 1/с. **3.2.** $1{,}37\cdot10^{-4}$ кг/м^3. **3.3.** Нет.
3.4. $9{,}8\cdot10^{-5}$ м^2/с. **3.5.** $1{,}84\cdot10^{-5}$ кг/(м·с); $1{,}36\cdot10^{-2}$ Вт/(м·К).
3.6. $8{,}9\cdot10^{-2}$ Вт/(м·К). **3.7.** 4,76 кг. **3.8.** $6{,}04\cdot10^4$ Дж.
3.9. $4{,}6\cdot10^{-2}$ Н. **3.10.** $2{,}46\cdot10^2$ Н.

§ 4.

4.1. $5\cdot10^3$ Дж; $3\cdot10^3$ Дж. **4.2.** $7{,}52\cdot10^2$ Дж/(кг·К).
4.3. 1200 К; $1{,}8\cdot10^{-3}$ м^3; $1{,}6\cdot10^3$ Дж. **4.4.** 0; $1{,}15\cdot10^4$ Дж.
4.5. $2{,}1\cdot10^4$ Дж; $1{,}9\cdot10^4$ Дж. **4.6.** 186 К. **4.7.** 593 К; $4{,}32\cdot10^5$ Па.
4.8. $Q_V = \Delta U = 2{,}6\cdot10^5$ Дж; $A = 0$. **4.9.** $5{,}17\cdot10^5$ Дж; $3{,}12\cdot10^5$ Дж; $2{,}05\cdot10^5$ Дж. **4.10.** 435 К.

§ 5.

5.1. 0,23. **5.2.** $2{,}8\cdot10^4$ Дж. **5.3.** $1{,}7\cdot10^3$ Дж. **5.4.** 293 Дж/К.
5.5. 15,7 Дж/К. **5.6.** При P = const. **5.7.** 409,5 К.
5.8. $5{,}2\cdot10^4$ Дж/К; $6{,}9\cdot10^4$ Дж/К. **5.9.** 2,9 Дж/К
5.10. $32\cdot10^2$ Дж/К; $9{,}1\cdot10^2$ Дж/К

§ 6.

6.1. 288 К; 298 К. **6.2.** $3\cdot10^{-10}$ м; $3{,}1\cdot10^{-10}$ м.
6.3. $1{,}37\cdot10^3$ Па. **6.4.** $6{,}8\cdot10^3$ Дж; $6{,}78\cdot10^3$ Дж. **6.5.** 396 К.
6.6. $3{,}6\cdot10^{-10}$ м. **6.7.** 300 К; 302 К. **6.8.** $81{,}4\cdot10^{-3}$ кг. **6.9.** 38,5 %; $\Delta m = 0$. **6.10.** 0,157 Па.

§ 7.

7.1. $2{,}26\cdot10^{-2}$ Н/м. **7.2.** $1{,}73\cdot10^{-3}$ Дж. **7.3.** $1{,}65\cdot10^{-4}$ К. **7.4.** $1{,}003\cdot10^{5}$ Па. **7.5.** $2{,}3\cdot10^{-2}$ Н/м. **7.6.** $146\cdot10^{-3}$ м. **7.7.** 1,53 мм. **7.8.** $2{,}5\cdot10^{5}$ Па. **7.9.** 313 К. **7.10.** $n_в$ = 25 Пр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершензон, Е. М. Молекулярная физика / Е. М. Гершензон, Н. Н. Малов, А. Н. Мансуров. –М., Академия, 2000. – 264с.
2. Кикоин, А.К. Молекулярная физика / А.К. Кикоин, И.К. Кикоин. – Спб.: Лань, 2008. –480 с.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2016. –432 с.
4. Алешкевич, В.А. Курс общей физики. Молекулярная физика / В.А. Алешкевич. – М.: Физматлит, 2016. – 312 с.
5. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – СПб.: Книжный мир, 2003. – 328с.
6. Гладской, В.М. Сборник задач с решениями / В.М. Гладской, П.И. Самойленко. – М.: Дрофа, 2002. – 288с.
7. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т.И. Трофимова. –М.: Академия, 2007. – 560 с.
8. Тульчинский, Г.Л. Курс общей физики: в 3 т. Т.1/ Г.Л. Тульчинский, Е. Шекова. – СПб.: Лань, 2016. – 432 с.
9. Тюрин, Ю. И. Молекулярная физика. Термодинамика / Ю. И. Тюрин, И. П. Чернов, Ю. Ю. Крючков. – СПБ.: Лань, 2008. – 288 с.
10. Молекулярная физика: учебное пособие /под ред. А.Н.Матвеева. –Спб.: Лань, 2010. – 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
§1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов 4
Примеры решения задач 5
Задачи для самостоятельного решения 9
§ 2. Распределение молекул в поле земного тяготения. распределение Максвелла 11
Примеры решения задач 12
Задачи для самостоятельного решения 14
§ 3. Длина свободного пробега. явления переноса 15
Примеры решения задач 16
Задачи для самостоятельного решения 20
§ 4. Первое начало термодинамики. Теплоемкость 21
Примеры решения задач 23
Задачи для самостоятельного решения 25
§ 5. Второе начало термодинамики. 28
Примеры решения задач 29
Задачи для самостоятельного решения 33
§ 6. Реальные газы. Насыщенные пары 34
Примеры решения задач 36
Задачи для самостоятельного решения 41
7. Жидкости 42
Примеры решения задач 44
Задачи для самостоятельного решения 47
Приложение 48
Ответы 51
Литература 52